04/12/17

Παράσταση Πολ. Παρεμβολής σε μορφή Lagrange.

Έστω $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, διαφορετικά μεταξύ τους.
Θεωρώ το πολυώνυμο $L_i \in \mathbb{P}^n$, τέτοιο ώστε

$$L_i(x_i) = \delta_{ij} \ (\delta \text{ kroneker}),\ j = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Αυτό θα είναι μοναδικό ως πολ. παρεμβολής στο x_j.
Έχει ρίζες τα $x_0, x_1, \ldots, x_{i-n}, x_{i+1}, \ldots, x_n$

Επομένως $$L_i(x) = a_i \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x - x_j)$$

Το a_i υπολογίζεται από την σχέση $L_i(x_i) = 1$.

$$\Rightarrow a_i \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j) = 1 \Leftrightarrow a_i = \frac{1}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)}$$

$$L_i(x) = \frac{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x - x_j)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)}$$

, Τα πολ. $L_0, L_1, L_2, \ldots, L_n$ λέγονται πολ/μα Lagrange.

Το πολ/μο παρεμβολής της $f \in C[a,b]$, στα $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ θα είναι το:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x), \quad P(x_k) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x_k)$$

$$= f(x_k),\ k = 0, 1, \ldots, n$$

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \frac{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x - x_j)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)}, \quad P(x) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \frac{\phi(x)}{(x - x_i)\phi'(x_i)} \right.$$

, όπου $\phi = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$

$$L_i(x) = \begin{cases} \dfrac{\phi(x)}{(x-x_i)\,\phi'(x_i)}, & x \neq x_i \\ 1, & x = x_i \end{cases}$$

Άσκηση

Να βρεθεί το πολ/μο παρεμβολής $p \in \mathbb{P}_3$, που παρεμβάλλεται στις τιμές της συνάρτησης

x_i	-1	0	1	2
f_i	2	0	0	8

Λύση

$$P(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x)$$

$$= 2\,\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} + 8\,\frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)}$$

$$= -\frac{1}{3}(x^3 - 3x^2 + 2x) + \frac{4}{3}(x^3 - x) =$$

$$= x^3 + x^2 - 2x$$

Παράσταση προς Πολ. Παρεμβολής σε μορφή Νεύτωνα

Έστω $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \in [a,b]$ διαφορετικά μεταξύ τους.

Παριστάνω το πολυώνυμο παρεμβολής στη μορφή

$$P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

$P(x) = y_0 \iff a_0 = y_0$

$P(x_1) = y_1 \iff a_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1 \iff$

$$a_1 = \frac{y_1 - a_0}{x_1 - x_0}.$$

$P(x_2) = y_2 \iff a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2.$

$$\iff a_2 = \left(\frac{y - a_0}{x_2 - x_0} - a_1 \right) \Big/ (x_2 - x_1)$$

$$a_3 = \left(\left(\frac{y_3 - a_0}{x_3 - x_0} - a_1 \right) \Big| (x_3 - x_1) - a_2 \right) \Big/ (x_3 - x_2)$$

$a_0 = y_0 = 2$

$$a_1 = \frac{y_2 - a_0}{x_1 - x_0} = \frac{0 - 2}{0 + 2} = -2.$$

$$a_2 = \left(\frac{0 - 2}{1 + 1} - (-2) \right) \Big| (1 - 0) = 1.$$

$$a_3 = \left[\left(\frac{8 - 2}{2 + 1} - (-2) \right) \Big| (2 - 0) - 1 \right] (2 - 1) = 1.$$

$$\begin{aligned}
P(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \\
&\quad + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
&= 2 - 2(x+1) + 1(x+1) \cdot x + 1(x+1)x(x-1) \\
&= 2 - 2x - 2 + x^2 + x + x^3 - x \\
&= x^3 + x^2 - 2x
\end{aligned}$$

$\vdots$

$a_4 = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

Διαιρεμένες διαφορές

Έστω τα σημεία $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \in [a,b]$.
Ορίζουμε ως διαιρεμένη διαφορά i τάξης ως εξής: $\Delta^0(x_0)(f) = f(x_0)$.

$$\Delta^i(x_0, x_1, x_2, \dots, x_i)(f) = \frac{\Delta^{i-1}(x_1, x_2, \dots x_i)(f) - \Delta^{i-1}(x_0 \dots x_{i-1})(f)}{x_1 - x_0}.$$

$$\Delta^1(x_0, x_1)(f) = \frac{\Delta^0(x_1)(f) - \Delta^0(x_0)(f)}{x_1 - x_0}$$

$$= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}$$

$$\Delta^2(x_0, x_1, x_2)(f) = \frac{\Delta^1(x_1, x_2)(f) - \Delta^1(x_0, x_1)(f)}{x_2 - x_0}$$

$$= \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} =$$

$$= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)}$$

$$\Delta^i(x_0, x_1, \dots, x_i)(f) = \sum_{j=0}^{i} \frac{f(x_j)}{\prod_{k=0, k \neq j} (x_j - x_k)}$$

Οι διαιρεμένες διαφορές είναι συμμετρική έκφραση των σημείων.

Θα αποδείξουμε ότι οι διαιρεμένες διαφορές i τάξης είναι οι συντελεστές a_i, στην παράσταση του πολ. παρεμβολής σε μορφή Newton.

$$a_i = \Delta^i (x_0, x_1, \ldots, x_i) f.$$

$a_0 = f(x_0) = \Delta^0(x_0)(f)$, ισχύει η πρόταση για $i=0$

Έστω ότι ισχύει για $i-1$, δηλαδή:

$$a_{i-1} = \Delta^{i-1}(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}) f$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για i.